

MENINGKATKAN *ADVANCED MATHEMATICAL THINKING* MAHASISWA

Oleh:

Elda Herlina

STAIN Batusangkar
herlinaelda@gmail.com

ABSTRAK

Makalah ini membahas tentang berpikir matematika tingkat lanjut atau *Advanced Mathematical Thinking* (AMT) dan bagaimana cara meningkatkannya. AMT merupakan kemampuan dalam merepresentasi, mengabstraksi, berpikir kreatif, dan pembuktian matematis. Pentingnya pengembangan kemampuan AMT sesuai dengan harapan pemerintah yang menyadari pentingnya penguasaan kompetensi matematika untuk kehidupan peserta didik. Manfaat dari mengembangkan AMT diantaranya: 1) mahasiswa mampu menyampaikan gagasan atau ide yang dimilikinya baik secara verbal, simbol, tabel, grafik dan diagram. 2) menemukan keterkaitan yang mendalam di antara cabang-cabang matematika, 3) mengetahui hasil-hasil di dalam satu cabang yang dapat memicu konjektur pada cabang yang berkaitan, 4) teknik dan metode dari satu cabang dapat diterapkan untuk membuktikan hasil pada cabang yang berkaitan, 5) mampu menemukan gagasan baru dalam pemecahan masalah, dan 5) mampu memahami dan mengkonstruksi bukti. Salah satu teori yang tidak hanya meningkatkan hasil belajar mahasiswa tetapi juga dapat mengkonstruksi pengetahuan melalui aktivitas mental mahasiswa, meningkatkan kreativitas, menciptakan suasana kelas yang menyenangkan dan menantang, dan dapat meningkatkan kemampuan AMT mahasiswa adalah pendekatan APOS.

Kata Kunci : *Advanced Mathematical Thinking*, Representasi, Abstraksi, Berpikir Kreatif, Pembuktian matematis, APOS

ABSTRACT

This journal discusses about Advanced Mathematical Thinking (AMT) and how to enhance it. AMT is ability in representing, abstracting, creative thinking, and mathematical proving. The importance of AMT ability development in accord with government expectation who realize about the importance of mathematical competency mastery for student's life. The advantage in developing AMT among others are: 1) student capable to deliver idea which is possessed in verbal, symbol, table, graphic and diagram. 2) Find deep connection among mathematic branches, 3) know the outcome in one of branch which can trigger conjecture in branch which is related, 4) technique and method from one branch can be applied to prove the outcome in branch which is related, 5) capable to find new idea in problem solving, and 6) capable to understand and construct the proof. One of theory which not only enhance student's learning outcome but also can construct knowledge through student's mental activity, enhance creativity, create class atmosphere which is enjoyable and challenging, and capable to enhance student's AMT ability is APOS approach.

Keywords: Advanced Mathematical Thinking, Representation, Abstraction, Creative Thinking, Mathematical Proving, APOS

I. PENDAHULUAN

Salah satu cara yang dapat digunakan untuk menciptakan sumber daya manusia yang siap menghadapi tantangan adalah dengan mengembangkan program pendidikan yang lebih fokus pada pengembangan kemampuan berpikir dalam hal ini kemampuan berpikir matematis tingkat lanjut atau *advanced mathematical thinking*. Berikut merupakan hasil survey beberapa ahli yang menyatakan bahwa kemampuan berpikir matematika tingkat lanjut masih rendah, diantaranya yang dilakukan oleh Davis (Tall, 2002) terhadap mahasiswa Universitas Teknologi Tennessee yang telah lulus mata kuliah kalkulus, para mahasiswa diberi soal tidak rutin.

Temukan setidaknya satu solusi untuk persamaan $4x^3 - x^4 = 30$ atau jelaskan mengapa tidak ada solusi yang muncul?

Ternyata tidak seorang mahasiswapun yang menjawab soal dengan benar, umumnya tidak dapat melakukan apapun. Situasi ini tidak jauh berbeda untuk empat soal yang lainnya. Selain itu Davis (Tall, 2002) juga pernah melakukan tes terhadap mahasiswa baru yang unggul waktu duduk di sekolah menengah, ditemukan bahwa banyak diantara mereka yang memiliki kesalahan konsepsi mengenai konsep matematika. Menurut Tall (2002) ada beberapa alasan menyebabkan hal ini terjadi, diantaranya: secara umum instruksi matematika dari sekolah dasar hingga perguruan tinggi mengajarkan mungkin apa yang disebut dengan ritual:” lakukan ini, kemudian lakukan itu” dan para guru biasanya akan membenarkan siswa yang menjawab sesuai dengan ritual.

Permasalahan di atas juga terjadi pada mahasiswa FKIP program studi Pendidikan Matematika Universitas Mulawarman Kalimantan Timur. Khususnya yang mengambil mata kuliah Aljabar. Berdasarkan hasil wawancara yang dilakukan terhadap enam orang mahasiswa diperoleh informasi bahwa mata kuliah aljabar termasuk mata kuliah yang sulit mereka pahami. Mahasiswa mengakui mereka kesulitan dalam memahami sifat-sifat aljabar dalam bentuk simbolik, membuktikan sifat-sifat aljabar, mengaitkan antara satu konsep dengan konsep yang lain, dan kesulitan dalam menyelesaikan masalah aljabar apabila tidak diberikan contoh oleh dosen. Hal ini menunjukkan rendahnya kemampuan Advanced Mathematical Thinking (AMT) mahasiswa.

Banyak model dan pendekatan pembelajaran yang mampu meningkatkan hasil belajar peserta didik, namun tidak semua model dan pendekatan pembelajaran yang mampu merancang pembelajaran sehingga pengetahuan dikonstruksi melalui aktivitas mental mahasiswa, memberi kesempatan yang luas kepada mahasiswa untuk meningkatkan kreativitas, dan menciptakan suasana kelas yang menyenangkan dan menantang. Menurut Asiala et al., (1997) melalui pendekatan APOS terjadi interaksi

antar mahasiswa dan diharapkan terjadi pertukaran pengalaman belajar berbeda sehingga aksi mental dapat terus berlanjut sesuai dengan yang diharapkan. Aktivitas seperti ini terus berlanjut sampai siswa memiliki kemampuan untuk melakukan refleksi terhadap aksi yang telah dilakukan, sehingga mahasiswa dapat mencapai tahap perkembangan potensial.

Selanjutnya Dubinsky & McDonald (2001) menyatakan bahwa teori APOS merupakan suatu pendekatan pembelajaran yang umumnya dilaksanakan untuk pembelajaran matematika di tingkat perguruan tinggi, yang mengintegrasikan penggunaan komputer, diskusi dalam kelompok kecil, dan memperhatikan konstruksi-konstruksi mental yang dilakukan oleh mahasiswa dalam memahami suatu konsep matematika. Konstruksi-konstruksi mental tersebut adalah: aksi (*action*), proses (*process*), objek (*object*), dan skema (*schema*) yang disingkat dengan APOS.

Rumusan Masalah dan Batasan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian yang akan diteliti dan dicari jawabannya berfokus pada perbedaan peningkatan *advanced mathematical thinking* setelah proses pembelajaran dengan menggunakan pendekatan APOS dan pembelajaran konvensional. Berdasarkan dari pemikiran di atas, maka permasalahan dalam penelitian ini dirumuskan secara rinci berdasarkan variabel, sebagai berikut:

1. Bagaimana deskripsi kemampuan *Advanced mathematical Thinking* (AMT) mahasiswa dalam mata kuliah aljabar antara yang menggunakan pendekatan APOS dan yang menggunakan pendekatan konvensional?
2. Apakah peningkatan kemampuan AMT mahasiswa dalam mata kuliah aljabar yang menggunakan pendekatan APOS lebih baik daripada mahasiswa yang menggunakan pendekatan konvensional?

II. KERANGKA TEORI

1. Pengertian *Advanced Mathematical Thinking* (AMT)

Sejumlah pakar (Dreyfus dalam Tall (2002); Harel & Sowder (A.Gutierrez, 2006); dan Sumarmo (2011)) menguraikan tentang pengertian *Advanced Mathematical Thinking* (AMT). Menurut Dreyfus (Tall, 2002) menyatakan bahwa proses AMT meliputi: 1) proses representasi, 2) proses abstraksi, 3) hubungan antara representasi dan abstraksi, lebih lanjut Tall menegaskan bahwa selain proses di atas berpikir kreatif matematik tergolong AMT. Hal ini sama dengan apa yang disampaikan oleh Harel dan Sowder (A. Gutierrez, 2006) yang mendefinisikan AMT sebagai proses berpikir matematika seperti proses representasi, abstraksi, hubungan representasi dan abstraksi, kreativitas dan bukti matematis. Senada dengan itu Sumarmo (2011) mendefinisikan AMT secara tentative sebagai kemampuan yang meliputi: representasi, abstraksi, menghubungkan representasi dan abstraksi, berpikir kreatif

matematis, dan menyusun bukti matematis. Selanjutnya (Tall, 2002) menjelaskan kisi-kisi dari AMT, mencakup proses: representasi, memvisualisasikan, menggeneralisasikan, mengklasifikasikan, menghipotesa, menginduksi, menganalisa, mensintesa dan mengabstraksikan atau memformalisasikan. Dari beberapa pengertian AMT di atas maka pengertian AMT adalah proses berpikir matematis yang meliputi proses representasi, abstraksi, berpikir kreatif matematis, dan pembuktian matematis. proses AMT ini juga terjadi dalam pemecahan masalah matematika SD misalnya proses representasi (representasi objek dunia nyata, representasi konkret) tetapi definisi, proses abstraksi dan pembuktian formal merupakan salah satu faktor yang membedakan dengan AMT.

2. Aspek-aspek *Advanced Mathematical Thinking*

a. Representasi Matematis

Terdapat beberapa ahli yang mengemukakan pengertian dari representasi yaitu (Davis (dalam Janvier, 1987); Kalathil dan Sherin, (2000); Goldin, (2002); Rosengrant, 2005); Hwang, (2007)). Menurut Davis (Janvier, 1987) sebuah representasi dapat berupa kombinasi dari sesuatu yang tertulis di atas kertas, sesuatu yang eksis dalam bentuk obyek fisik dan susunan ide-ide yang terkonstruksi di dalam pikiran seseorang. Selanjutnya (Kalathil dan Sherin, 2000) lebih sederhana menyatakan bahwa representasi adalah segala sesuatu yang dibuat siswa untuk mengeksternalisasikan dan memperlihatkan kerjanya.

Selanjutnya (Rosengrant, 2005) menyatakan bahwa beberapa representasi bersifat lebih konkret dan berfungsi sebagai acuan untuk konsep-konsep yang lebih abstrak dan sebagai alat bantu dalam pemecahan masalah. Sedangkan dalam psikologi pendidikan matematika, representasi merupakan deskripsi hubungan antara objek dengan simbol Hwang (2007). Dalam tulisan ini definisi representasi yang saya gunakan adalah definisi menurut Goldin, karena dari beberapa definisi sifatnya lebih umum. Representasi matematis yang dimunculkan oleh siswa merupakan ungkapan dari gagasan atau ide matematik yang ditampilkan siswa dalam upaya untuk memahami konsep matematika atau untuk mencari solusi dari masalah yang sedang dihadapi. Dengan demikian diharapkan memiliki akses ke representasi atau gagasan yang mereka tampilkan, mereka memiliki sekumpulan alat yang siap secara signifikan akan memperluas kapasitas mereka dalam berpikir matematis. (NCTM, 2000)

Dari beberapa definisi representasi tersebut di atas dapat disimpulkan bahwa representasi matematis adalah ungkapan-ungkapan dari ide-ide matematika (masalah, pernyataan, definisi, dan lain-lain) yang digunakan untuk memperlihatkan (mengkomunikasikan) hasil kerjanya dengan cara tertentu sebagai hasil interpretasi dari pikirannya.

Contoh soal representasi matematis:

- 1) Misalkan $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2$
 - a) Interpretasikan f dengan menggunakan grafik
 - b) Beri penjelasan secara verbal, apakah f surjektif?
 - c) Buktikan secara formal bahwa f injektif
- 2). Misalkan $U(15)$ grup
 - a) Interpretasikan dengan kata-kata, apa maksud $U(15)$
 - b) Interpretasikan dengan simbol pengertian dari $U(15)$
 - c) Apakah $7 \in U(15)$, jika iya tentukan inversnya

b. Abstraksi

Proclus (2006) mendefinisikan abstraksi dalam matematika sebagai proses untuk memperoleh intisari konsep matematika, menghilangkan kebergantungannya pada objek-objek dunia nyata yang pada mulanya mungkin saling terkait, dan memperumumnya sehingga ia memiliki terapan-terapan yang lebih luas atau bersesuaian dengan penjelasan abstrak lain untuk gejala yang setara. Sedangkan Dreyfus (1991), Sfard (1991,1992), dan Dubinsky (1991) (dalam White, P., & Mitchelmore, M. C., 2010) menjelaskan bahwa abstraksi adalah peralihan dari model operasional konkrit ke model (abstrak) struktural.

Terdapat dua proses yang merupakan persyaratan dalam proses abstraksi, yakni menggeneralisasi dan mensintesa.

(1) Menggeneralisasi

Menurut (Tall, 2002) menggeneralisasi berarti memunculkan atau menginduksi dari yang khusus untuk mengidentifikasi kesamaan-kesamaan.

Contoh abstraksi sebagai generalisasi:

Misalkan Z_n himpunan bilangan bulat modulo n . $n \in \mathbb{Z}^+$
 Untuk $n=2$ $(Z_n, +)$ grup
 Untuk $n=3$ $(Z_n, +)$ grup
 Untuk $n=4$ $(Z_n, +)$ bukan grup
 Untuk $n=5$ $(Z_n, +)$ grup
 Untuk $n=6$ $(Z_n, +)$ bukan grup
 Apa yang bisa disimpulkan dari pernyataan di atas?

(2) Mensintesa

Mensintesa berarti menggabungkan atau menyusun bagian-bagian dalam cara dimana bagian-bagian tersebut membentuk suatu keutuhan, yaitu keseluruhan (Tall, 2002). Misalnya dalam mata kuliah aljabar linear terdapat beberapa materi yang diajarkan secara terpisah mengenai ortogonalisasi vektor, diagonalisasi matriks, transformasi basis, solusi sistem persamaan linear, dan sebagainya. Dalam pembelajaran, semua materi yang tidak berhubungan ini diharapkan digabung ke dalam suatu gambaran yang semua materi berinterelasi. Menurut (Tall, 2002) proses penggabungan ini disebut sintesa.

c. Berpikir Kreatif Matematis

Mann (2005) menyatakan sulit mendefinisikan berpikir kreatif matematis secara jelas, namun berpikir kreatif matematis dapat dibedakan dari ciri-ciri yang dimilikinya. Berbeda dengan Mann, Welsch, McGregor (2007) mendefinisikan berpikir kreatif matematis sebagai salah satu jenis berpikir yang mengarahkan diperolehnya wawasan baru, pendekatan baru, perspektif baru, atau cara baru dalam memahami sesuatu. Berpikir kreatif matematis dapat terjadi ketika dipicu oleh tugas tugas atau masalah yang menantang. Selanjutnya Evans (1991) juga menyatakan bahwa berpikir kreatif matematis merupakan cara berpikir yang menghasilkan sesuatu yang baru dalam bentuk konsep, penemuan maupun karya seni.

Contoh Soal Keterampilan Berpikir Kreatif Matematis:

(a). Keterampilan berpikir lancar (*fluency*)

Misalkan G suatu grup dan a suatu elemen tertentu dari G . $\mathcal{A}(a) = \{g \in G \mid ga = ag\}$. Tunjukkan bahwa $\mathcal{A}(a)$ adalah subgrup dari G .

Terdapat tiga cara membuktikan subgrup di atas, diharapkan mahasiswa mampu menyelesaikan dengan cara yang dipilihnya sendiri.

(b). Keterampilan berpikir luwes (*flexibility*)

Buktikan bahwa suatu grup yang berorder 4 adalah grup abelian. Apakah terdapat grup finite lain yang abelian? Jelaskan jawabanmu

(c). Keterampilan berpikir orisinil (*originality*)

$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Q} \text{ dan } ad \neq bc \right\}$ dengan perkalian matriks

adalah suatu grup. Apabila $N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Q} \text{ dan } ac \neq 0 \right\}$ dan

$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q} \text{ dan } ab \neq 0 \right\}$, Apakah N dan H masing-

masing adalah subgrup dari M ? Jelaskan jawabanmu!

(d). Keterampilan memperinci (*elaboration*)

Jika a dan b dua sikel yang saling asing, apakah $ab = ba$, jika iya buktikan dan jika tidak berikan contoh.

d. Pembuktian Matematis

Menurut Hanna (Yoo, 2008) menyatakan bahwa bukti merupakan representasi dari hasil matematika untuk mengkomunikasikan pemahaman kepada komunitas matematika lainnya dan menerimanya sebagai teorema baru. Selanjutnya Schoenfeld (Arnawa, 2006) menyatakan bahwa pembuktian pada dasarnya adalah membuat serangkaian deduksi dari asumsi (premis atau aksioma) dan hasil-hasil matematika yang sudah ada (lemma atau teorema) untuk memperoleh hasil-hasil penting dari suatu persoalan matematika.

Menurut Selden & Selden (Tall, 2002) kemampuan pembuktian matematis mahasiswa terdiri dari: (1) kemampuan mengkonstruksi bukti dan (2) kemampuan memvalidasi bukti. Pembuktian matematis dapat berfungsi sebagai suatu proses aktual melalui konstruksi bukti dan sebagai fase akhir. Sama halnya dengan apa yang disampaikan Hadamard (Tall, 2002) menyatakan bahwa pembuktian matematis merupakan fase akhir dalam berpikir matematis.

Contoh Pembuktian Matematika:

- 1) Misalkan (G, O) suatu grup dengan elemen identitas e . Apabila suatu elemen G mempunyai invers, maka buktikan bahwa invers tersebut tunggal.
- 2) Jika p suatu bilangan prima dan $G = \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ maka buktikan $(G, +)$ adalah suatu grup abel.
- 3) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \text{ bilangan-bilangan rasional dan } ac \neq 0 \right\}$. Buktikan bahwa M dengan perkalian matriks adalah suatu grup. Apakah M tersebut suatu grup abelian? Jelaskan!

3. Pendekatan APOS

Menurut Suryadi (2012) teori APOS adalah sebuah teori konstruktivisme tentang bagaimana seseorang belajar suatu konsep matematika. Dubinsky dan rekan (Hawks&Nichols, 1989; Breidenbachetal, 1992; Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996) menyelidiki perbedaan proses-obyek dan mengembangkannya menjadi empat macam konstruksi mental yaitu: Aksi, Proses, Objek, dan Skema (disebut sebagai APOS).

Berikut pengertian Aksi, Proses, Objek, dan skema menurut Asiala (1997) dan Suryadi (2012).

Aksi (action):

Menurut Asiala, *et al.* (1997) *An action is a transformation of mathematical objects that is performed by an individual according to some explicit algorithm and hence is seen by the subject as externally driven.* Sama halnya dengan pengertian yang dinyatakan Suryadi (2012) bahwa aksi adalah suatu transformasi obyek-obyek mental untuk memperoleh obyek mental lainnya. Selanjutnya Suryadi juga menyatakan bahwa seseorang dikatakan mengalami suatu aksi apabila orang tersebut memfokuskan proses mentalnya pada upaya untuk memahami suatu konsep yang diberikan. Untuk lebih jelasnya tentang penjelasan tentang konsepsi aksi, diberikan sebuah ilustrasi mengenai konsep grup. Seseorang yang belum mampu menginterpretasikan sesuatu sebagai suatu grup, kecuali jika diberikan sebuah himpunan hingga terhadap sebuah operasi sehingga mampu menentukan apakah himpunan hingga itu sebuah grup, dapat dinyatakan seseorang telah memiliki kemampuan untuk melakukan aksi atas grup tersebut.

Proses (*Process*):

Menurut Asiala, *et al.* (1997) sebagai berikut: *When the individual re-acts on the action and constructs an internal operation that performs the same transformation then we say that the action has been interiorized to a process.* Senada dengan Asiala, *et al.*, Suryadi (2012) juga menyatakan bahwa ketika suatu aksi diulangi, dan kemudian terjadi refleksi atas aksi yang dilakukan, maka selanjutnya akan masuk ke dalam fase proses. Berbeda dengan aksi yang dapat terjadi melalui manipulasi benda atau sesuatu yang bersifat konkrit, proses terjadi secara internal di bawah kontrol individu yang melakukannya. Seseorang dikatakan mengalami suatu proses tentang sebuah konsep, apabila berpikirnya terbatas pada ide matematik yang dihadapi serta ditandai dengan munculnya kemampuan untuk melakukan refleksi terhadap ide matematika tersebut. Misalnya pada konsep grup, seseorang dikatakan mengalami proses apabila telah mampu memanipulasi beberapa himpunan dan terhadap operasi sebarang, dapat dinyatakan telah memiliki kemampuan untuk melakukan proses pada konsep grup tersebut.

Objek (*object*)

Menurut Asiala, *et al.* (1997) objek didefinisikan sebagai berikut: *When it becomes necessary to perform actions on a process, the subject must encapsulate it to become a total entity, or an object. In many mathematical operations, it is necessary to de-encapsulate an object and work with the process from which it came.* Begitu juga Suryadi (2012) menyatakan bahwa seseorang dikatakan telah memiliki konsepsi objek dari suatu konsep matematika, apabila ia telah mampu memperlakukan idea atau konsep tersebut sebagai sebuah objek kognitif yang mencakup kemampuan untuk melakukan aksi atas objek tersebut, serta memberikan alasan atau penjelasan tentang sifat-sifatnya. Selain itu individu tersebut juga telah mampu melakukan penguraian kembali suatu objek menjadi proses sebagai mana asalnya pada saat sifat-sifat dari objek yang dimaksud akan digunakan. Hal ini dapat di ilustrasikan pada konsep grup, seseorang dikatakan telah memiliki konsepsi objek pada konsep grup apabila ia telah mampu melakukan pengelompokan grup serta mampu menjelaskan sifat-sifat dari masing-masing grup.

Skema (*Schema*):

Menurut Asiala, *et al.* (1997) skema adalah: *A schema is a coherent collection of processes, objects and previously constructed schemas, that is invoked to deal with a mathematical problem situation. As with encapsulated processes, an object is created when a schema is thematized to become another kind of object which can also be de-thematized to obtain the original contents of the schema.* Sama halnya, Suryadi (2012) menyatakan bahwa sebuah skema dari suatu materi matematik tertentu adalah suatu koleksi aksi, proses, objek, dan skema lainnya yang saling terhubung sehingga membentuk suatu kerangka kerja saling terkait di dalam pikiran

seseorang. Indikator seseorang telah memiliki skema adalah apabila telah memiliki kemampuan untuk mengkonstruksi contoh-contoh suatu konsep matematika sesuai dengan sifat-sifat yang dimiliki konsep tersebut. Pada Konsep grup, seseorang dikatakan telah memiliki konsepsi skema apabila ia telah mampu mengkonstruksi contoh-contoh dari grup sesuai dengan sifat-sifat yang dimiliki konsep grup.

III. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan melalui dua tahap, yaitu 1) tahap persiapan, dan 2) tahap pelaksanaan. Desain penelitian yang digunakan adalah *Nonequivalent control group design*. Penelitian ini dilakukan di Universitas Mulawarman Samarinda dengan alasan bahwa di UNMUL belum pernah dilakukan penelitian tentang *advanced mathematical thinking* dan UNMUL merupakan satu-satunya universitas negeri di Kalimantan Timur.

Penelitian ini terdiri dari dua kelas sampel, yaitu kelas eksperimen dan kelas kontrol. Pada kelas eksperimen dan kelas kontrol berturut-turut dilaksanakan pembelajaran dengan pendekatan APOS (X) dan pendekatan konvensional. Sebelum diberi perlakuan, pada kedua kelas dilaksanakan pretes, untuk mengetahui kemampuan AMT mahasiswa sebelum diberi perlakuan.

Pengolahan data kemampuan AMT mahasiswa dilakukan sesuai tahap berikut:

1. Menguji semua persyaratan statistik yang diperlukan sebagai dasar untuk menguji hipotesis. Sebelum tes kemampuan AMT mahasiswa digunakan, persyaratan yang diuji terlebih dahulu adalah uji normalitas sebaran data. Uji statistik yang digunakan adalah: uji Shapiro-Wilk atau uji Kolmogorov-Smirnov. Pada penelitian ini untuk uji homogenitas digunakan uji Levene dan uji normalitas digunakan uji Shapiro-Wilk.
2. Jika semua data ditemukan berdistribusi normal, lanjutkan dengan uji homogenitas varians. Uji homogenitas dilakukan dengan menggunakan uji Levene.
3. Menentukan uji statistik dan kriteria pengujian sesuai permasalahan dalam rangka menguji hipotesis yang sudah dirumuskan. Jika data berdistribusi normal dan bervariansi homogen, maka :
 - a. Untuk menguji perbedaan dua sampel berpasangan gunakan uji-t, dan untuk uji perbedaan dua sampel independen digunakan uji-t', sedangkan uji perbedaan lebih dari dua sampel independen digunakan ANOVA satu jalur .
 - b. Untuk menguji pengaruh interaksi digunakan: ANOVA dua jalur, dan *General Linear Model* (GLM)
 - c. Untuk menguji adanya asosiasi antar variabel, digunakan: koefisien kontingensi dari tabulasi silang.

Untuk melihat gambaran kuantitatifnya: apabila uji ANOVA satu jalur menunjukkan adanya perbedaan, akan dilanjutkan uji statistik lanjutan dengan menggunakan uji Scheffe.

4. Apabila salah satu atau semua data yang diuji tidak berdistribusi normal dan atau berdistribusi normal akan tetapi variansnya tidak homogen, maka pengujian hipotesis dilakukan dengan menggunakan kaidah statistika nonparametrik, yaitu:
 - a. Untuk membandingkan lebih dari dua sampel independen digunakan uji Kruskal-Wallis.
 - b. Untuk membandingkan dua sampel independen digunakan uji Mann-Whitney
 - c. Untuk membandingkan lebih dari dua sampel berpasangan digunakan uji Friedman

Pengujian hipotesis dilakukan dengan bantuan perangkat lunak SPSS-17 *for Windows*.

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Hasil Penelitian

Berdasarkan data hasil tes kemampuan AMT mahasiswa dideskripsikan dan dianalisis berdasarkan pendekatan pembelajaran. Deskripsi hasil penelitian tentang AMT digambarkan pada Tabel berikut.

Tabel Deskripsi Kemampuan AMT Mahasiswa

Level KAM	Data Statistik	Pendekatan Pembelajaran					
		APOS			Konvensional		
		Pre-tes	Post-tes	Rerata N-gain	Pre-tes	Post-tes	Rerata N-gain
Atas	N	11	11		5	5	
	Rerata	10,60	40,40	0,65	10,73	38,64	0,62
	SB	4,80	4,54	0,11	3,21	3,13	0,08
Tengah	N	22	22		27	27	
	Rerata	8,15	25,44	0,36	10,27	24,68	0,31
	SB	4,08	2,01	0,08	1,94	6,18	0,13
Bawah	N	7	7		7	7	
	Rerata	9,86	19,43	0,20	6,43	21,00	0,29
	SB	5,37	3,41	0,09	1,51	2,31	0,48
Gabungan	N	40	40		39	39	
	Rerata	10,32	27,60	0,39	8,15	26,56	0,37
	SB	4,40	7,77	0,18	2,31	7,73	0,15

Berdasarkan deskripsi data dalam Tabel di atas, diperoleh hasil analisis data peningkatan kemampuan AMT mahasiswa sebagai berikut.

- 1) Secara keseluruhan, peningkatan kemampuan AMT mahasiswa yang memperoleh pendekatan APOS lebih tinggi dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara konvensional, hal ini ditunjukkan dengan perolehan rerata *N-Gain* mahasiswa, pada kelas APOS sebesar 0,39 dan kelas konvensional sebesar 0,37. Peningkatan kemampuan AMT pada kedua kelas termasuk kategori sedang.
- 2) Berdasarkan level KAM, untuk level KAM atas peningkatan kemampuan AMT mahasiswa yang menggunakan pendekatan APOS lebih tinggi dibandingkan mahasiswa yang menggunakan pembelajaran konvensional, namun perbedaannya tidak signifikan. Hal ini dapat dilihat dari rerata *N-Gain* kelas APOS 0,65 dan rerata *N-Gain* kelas konvensional 0,62. Peningkatan kemampuan AMT mahasiswa untuk level KAM atas pada kedua kelas termasuk kategori sedang.

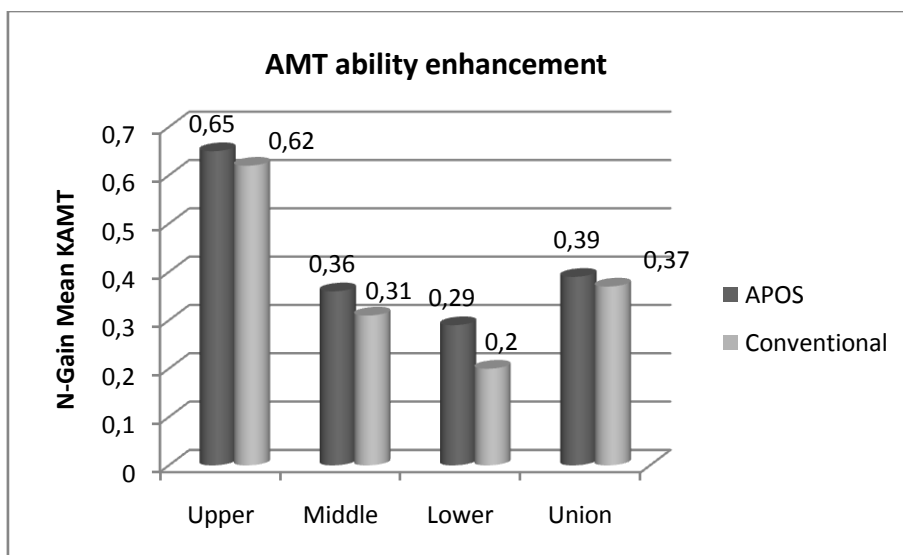
Begitu juga pada level KAM tengah, peningkatan kemampuan AMT mahasiswa yang menggunakan pendekatan APOS juga lebih tinggi dibandingkan mahasiswa yang menggunakan pembelajaran konvensional, namun perbedaannya tidak signifikan. Hal ini dapat dilihat dari rerata *N-Gain* kelas APOS 0,36 dan rerata *N-Gain* kelas konvensional 0,31. Peningkatan kemampuan AMT mahasiswa untuk level KAM tengah pada kedua kelas juga termasuk kategori sedang.

Berikutnya, pada level KAM bawah peningkatan kemampuan AMT mahasiswa yang menggunakan pendekatan APOS juga lebih tinggi dibandingkan mahasiswa yang menggunakan pembelajaran konvensional, namun perbedaannya juga tidak signifikan. Hal ini dapat dilihat dari rerata *N-Gain* kelas APOS 0,29 dan rerata *N-Gain* kelas konvensional 0,20. Peningkatan kemampuan AMT mahasiswa untuk level KAM bawah pada kedua kelas termasuk kategori rendah.

- 3) Untuk mahasiswa pada kedua kelas (APOS, konvensional), peningkatan kemampuan AMT mahasiswa level KAM atas lebih tinggi dibandingkan dengan mahasiswa level KAM tengah dan bawah. Hal ini dapat dilihat dari rerata *N-Gain* pada kelas APOS, untuk level KAM atas rerata *N-Gain* 0,65, sedangkan rerata *N-Gain* level tengah dan bawah berturut-turut adalah 0,36 dan 0,29. Begitu juga pada kelas konvensional, untuk level KAM atas rerata *N-Gain* 0,62, sedangkan rerata *N-Gain* level tengah dan bawah berturut-turut adalah 0,31 dan 0,20.

Deskripsi data terhadap peningkatan kemampuan AMT mahasiswa berdasarkan pendekatan pembelajaran menunjukkan terdapat peningkatan pada kelas APOS maupun pada kelas konvensional. Jika dilihat perbedaan peningkatan kemampuan AMT mahasiswa pada kedua kelas (APOS, konvensional), maka perbedaannya tidak

signifikan. Deskripsi data tersebut dapat diperjelas dengan menggunakan diagram batang pada Gambar 1.1 berikut.



Gambar 1.1
Peningkatan Kemampuan AMT Mahasiswa
berdasarkan Pembelajaran, KAM, dan Keseluruhan

Deskripsi data terhadap peningkatan kemampuan AMT mahasiswa berdasarkan pendekatan pembelajaran menunjukkan terdapat peningkatan pada kelas APOS maupun pada kelas konvensional. Jika dilihat perbedaan peningkatan kemampuan AMT mahasiswa pada kedua kelas (APOS, konvensional), maka perbedaannya tidak signifikan. Deskripsi data tersebut dapat diperjelas dengan menggunakan diagram batang pada Gambar 4.2 berikut.

Hasil pengujian terhadap peningkatan kemampuan AMT mahasiswa setelah mendapat pembelajaran dengan kedua pendekatan pembelajaran (APOS, dan Konvensional) disajikan pada Tabel berikut.

Tabel Hasil Uji Perbedaan Peningkatan Kemampuan AMT Mahasiswa
pada Kedua Pendekatan Pembelajaran

	Pembelajaran	U Mann Whitney	Z	p-value (sig)	Keterangan
Peningkatan AMT	APOS	751,000	-0,284	0,776	Tidak ada perbedaan
	Konvensional				

Berdasarkan Tabel di atas diperoleh hasil perhitungan statistik pada peningkatan kemampuan AMT mahasiswa setelah mendapat pembelajaran dengan kedua pendekatan pembelajaran (APOS, dan Konvensional) dengan nilai Z uji Mann Whitney sebesar 751,000 dengan nilai *p-value* (sig) sebesar 0,776. Sehingga diperoleh nilai *p-value* lebih besar dari 0,05, maka H_0 diterima. Hal ini berarti tidak terdapat perbedaan peningkatan AMT mahasiswa antara yang mendapat pembelajaran dengan pendekatan APOS atau pembelajaran Konvensional.

2. Pembahasan

Salah satu temuan tentang kemampuan AMT jika ditinjau berdasarkan pendekatan adalah kemampuan AMT mahasiswa yang menggunakan pendekatan APOS dan kelas konvensional tidak berbeda secara signifikan. Hal ini dapat dilihat pada Tabel 4.7 terlihat bahwa rata-rata *N-gain* skor kemampuan AMT pada kelas APOS dan kelas konvensional berturut-turut 0,39 dan 0,37. Menurut Hake (1999) peningkatan kemampuan AMT mahasiswa pada kelas APOS dan kelas konvensional termasuk pada kategori sedang. Hasil tersebut didukung pula oleh nilai postes, terlihat bahwa mahasiswa yang memperoleh pembelajaran dengan pendekatan APOS menunjukkan rerata postes yang lebih tinggi daripada mahasiswa yang memperoleh pembelajaran konvensional. Namun secara keseluruhan rerata postes yang diperoleh mahasiswa kelas APOS masih rendah, yaitu sebesar 27,60 dan rerata postes yang diperoleh mahasiswa kelas konvensional adalah 26,56. Jika ditinjau secara keseluruhan, pada kedua pembelajaran, peningkatan kemampuan AMT mahasiswa berada dalam tingkatan yang sama, yaitu pada tingkat sedang.

Hal ini didukung oleh hasil analisis secara statistik dengan menggunakan uji mann Whitney ditemukan bahwa tidak terdapat perbedaan peningkatan kemampuan AMT mahasiswa antara kelas APOS dan kelas konvensional. Temuan ini berbeda dengan temuan Arnawa (2006), Nurlaelah (2009), dan Yerizon (2011). Arnawa (2006) dalam penelitiannya di perguruan tinggi menemukan bahwa mahasiswa yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak yang menggunakan teori APOS mempunyai kemampuan pembuktian yang lebih baik dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara biasa. Begitu juga dengan temuan Nurlaelah (2009) yang melakukan penelitian terhadap mahasiswa calon guru, menemukan bahwa mahasiswa calon guru yang belajar dengan model pembelajaran APOS dan M-APOS secara umum mencapai daya matematik yang lebih baik dibandingkan dengan model pembelajaran konvensional. Sedangkan untuk capaian kreativitas matematis mahasiswa calon guru yang belajar menggunakan model pembelajaran M-APOS secara umum lebih baik dibandingkan dengan model pembelajaran APOS dan konvensional. Temuan Arnawa dan Nurlaelah senada dengan temuan Yerizon (2011) yang melakukan penelitian terhadap mahasiswa dan menemukan bahwa pembelajaran dengan pendekatan M-APOS dapat meningkatkan kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti.

Pada saat diskusi kelas, setiap kelompok menyampaikan apa yang telah dipahami sebelumnya. Melalui diskusi ini merupakan kesempatan bagi mahasiswa untuk memperbaiki kesalahan konsep yang terjadi. Selain itu diskusi kelas juga dapat melatih kemampuan representasi matematis mahasiswa, karena tidak sedikit mahasiswa yang tidak mampu memahami simbol-simbol yang terdapat pada bahan ajar. Hal ini terlihat pada saat mereka menyajikan hasil diskusi di depan kelas. Temuan ini sesuai dengan apa yang disampaikan Nodding (Polla, 2000) bahwa diskusi kelas dapat membantu siswa mengembangkan keterampilan sosial dan keterampilan komunikasi. Begitu juga Suryadi (2012) menyatakan bahwa dengan mendengarkan apa yang ditemukan orang lain serta mendiskusikannya, siswa dimungkinkan untuk meningkatkan strategi yang mereka temukan sendiri. Dengan demikian interaksi memungkinkan siswa untuk melakukan refleksi yang pada akhirnya akan mendorong mereka memperoleh pemahaman yang lebih tinggi dari sebelumnya.

Temuan berikutnya adalah berdasarkan hasil pengamatan yang dilakukan observer selama perkuliahan berlangsung, bahwa pada pertemuan pertama dan kedua, sulit untuk menciptakan suasana pembelajaran yang aktif, mahasiswa masih sulit untuk merubah pola pikir dari kebiasaan menerima begitu saja materi perkuliahan menjadi harus memahami sendiri terlebih dahulu konsep matematika sehingga mahasiswa memiliki pengetahuan awal mengenai suatu konsep. Begitu juga dalam diskusi kelas, belum ada yang merespon hasil penyajian temannya di depan kelas. Dalam diskusi kelompokpun yang berperan aktif hanya mahasiswa yang mempunyai kemampuan tinggi, sedangkan mahasiswa yang mempunyai kemampuan sedang dan rendah cenderung menerima dan memperhatikan penjelasan dari temannya.

Pada pertemuan ketiga dan selanjutnya mulai tercipta suasana perkuliahan yang aktif, mahasiswa mulai terlihat serius memahami konsep yang akan didiskusikan, sehingga pada saat diskusi kelas setiap kelompok sudah terlihat berani mengeluarkan pendapat. Begitu juga interaksi antar mahasiswa dalam kelompok sudah mulai terlihat, mahasiswa berkemampuan sedang dan rendah sudah mulai ikut serta memberikan pendapat dan ide yang mereka miliki sehingga mahasiswa memiliki kemampuan melakukan refleksi terhadap apa yang sudah mereka pahami. Temuan ini sesuai dengan pendapat Asiala et., (1997) bahwa melalui pendekatan APOS terjadi interaksi antar mahasiswa dan diharapkan terjadi pertukaran pengalaman belajar berbeda sehingga aksi mental terjadi sesuai dengan yang diharapkan.

Berikutnya pada saat menyelesaikan soal-soal yang ada pada Lembar Kerja Mahasiswa (LKM), pada pertemuan pertama dan kedua hanya dikerjakan oleh mahasiswa yang mempunyai kemampuan tinggi, sedangkan mahasiswa yang mempunyai kemampuan sedang dan rendah hanya melihat dan menerima begitu saja hasil pekerjaan temannya. Namun pada pertemuan ketiga dan seterusnya sudah terlihat usaha dari setiap individu walaupun jawaban yang mereka hasilkan masih

kurang lengkap. Di akhir perkuliahan dosen membimbing mahasiswa dalam menyampaikan kesimpulan tentang konsep yang sudah mereka pelajari.

Temuan selanjutnya yang berkaitan dengan pendekatan bahwa berdasarkan hasil kajian Brophy dan Good (Suryadi, 2012) model pembelajaran langsung merupakan cara yang paling efektif untuk mengembangkan kemampuan berpikir matematika tingkat rendah dan belum ada bukti bahwa model pembelajaran langsung dapat meningkatkan kemampuan berpikir matematika tingkat tinggi. Namun demikian berdasarkan temuan penelitian ini menunjukkan bahwa pendekatan konvensional dapat mengembangkan kemampuan AMT, tetapi jika ditinjau dari skor rata-ratanya ditemukan bahwa rata-rata-*gain* kelas APOS sebesar 0,39 dan -rata-*gain* kelas konvensional adalah 0,37, menurut Hake (1999) rata-rata-*gain* masih tergolong kategori sedang. Berdasarkan temuan ini maka sangat besar peluang untuk meningkatkan kemampuan AMT mahasiswa pada kedua kelas APOS dan konvensional.

V. KESIMPULAN DAN REKOMENDASI

1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan di atas, secara umum dapat diperoleh kesimpulan mengenai kemampuan advanced mathematical thinking, sebagai berikut.

1. Berdasarkan hasil analisis deskriptif, diperoleh bahwa:
 - a. Terdapat peningkatan kemampuan AMT mahasiswa baik yang memperoleh pembelajaran dengan pendekatan APOS maupun yang memperoleh pembelajaran konvensional. Hal ini berdasarkan perbandingan rata-rata, dan simpangan baku skor kemampuan AMT mahasiswa.
 - b. Peningkatan kemampuan AMT mahasiswa kelas APOS hampir sama dengan peningkatan kemampuan AMT mahasiswa kelas konvensional. Hal ini dilihat dari rata-rata *N-gain* skor kemampuan AMT mahasiswa pada kedua kelas.
 - c. Terdapat perbedaan peningkatan kemampuan AMT mahasiswa antara kelas APOS dan kelas konvensional berdasarkan level KAM, hal ini terlihat dari hasil rata-rata *N-gain* skor kemampuan AMT mahasiswa level KAM atas lebih tinggi dari peningkatan kemampuan AMT mahasiswa level KAM tengah dan bawah. Selanjutnya peningkatan kemampuan AMT mahasiswa level KAM tengah lebih tinggi dari level KAM bawah.
2. Tidak terdapat perbedaan peningkatan kemampuan AMT antara mahasiswa yang mendapat pembelajaran dengan pendekatan APOS dan mahasiswa yang mendapat pembelajaran konvensional secara keseluruhan.
3. Terdapat perbedaan peningkatan kemampuan AMT antara mahasiswa yang mendapat pembelajaran dengan pendekatan APOS dan mahasiswa yang mendapat pembelajaran konvensional, berdasarkan level KAM (atas, tengah, dan bawah).

2. Rekomendasi

Berdasarkan uraian hasil penelitian dan kesimpulan di atas, ditemukan bahwa tidak terdapat perbedaan kemampuan AMT mahasiswa antara yang memperoleh pembelajaran dengan pendekatan APOS dan yang memperoleh pembelajaran dengan pendekatan konvensional. Dalam hal ini, rekomendasi yang disarankan adalah:

1. Kemampuan berpikir sebaiknya dilatih mulai dari pendidikan dasar sehingga di perguruan tinggi mahasiswa mempunyai kebiasaan berpikir matematis.
2. Pembelajaran dengan pendekatan APOS, harapannya dapat terus dikembangkan di lapangan dan dijadikan sebagai alternatif pilihan dosen dalam pembelajaran matematika. Hal ini karena pembelajaran tersebut dapat meningkatkan kemampuan AMT, walaupun masih kategori sedang.
3. Berdasarkan temuan hasil penelitian bahwa pembelajaran dengan pendekatan APOS berpengaruh terhadap peningkatan kemampuan AMT mahasiswa walaupun masih kategori sedang, diharapkan hal ini menjadi perhatian bagi dosen, bahwa selama proses pembelajaran mahasiswa tidak hanya dituntut mampu menyelesaikan masalah, tapi hal penting dari itu adalah bagaimana cara mahasiswa menemukan penyelesaian masalah tersebut. Jadi yang lebih diperhatikan adalah proses berpikir mahasiswa, bukan hanya hasil pemikirannya.
4. Berdasarkan pengalaman selama penelitian, sebaiknya sebelum dilakukan penelitian dilakukan sosialisasi selama tiga kali pertemuan mengenai pendekatan APOS, hal ini tidak hanya dilakukan terhadap dosen pengampu mata kuliah tetapi juga penting dilakukan terhadap mahasiswa. Hal ini dilakukan agar waktu penelitian dimulai mahasiswa tidak merasa asing dengan pendekatan yang diterapkan.
5. Dalam penelitian ini, peneliti juga mengkaji aspek-aspek AMT (representasi, abstraksi, berpikir kreatif, dan pembuktian matematis). Berdasarkan keempat aspek tersebut aspek yang paling sulit bagi mahasiswa adalah aspek berpikir kreatif, dan pembuktian matematis. Hal ini perlu dikaji lebih mendalam, sehingga diperlukan penelitian lebih lanjut agar memberikan kontribusi dalam peningkatan kualitas pembelajaran.

DAFTAR PUSTAKA

- Arnawa, M. (2006). *Meningkatkan kemampuan Pembuktian Mahasiswa dalam Aljabar Abstrak melalui Pembelajaran Berdasarkan Teori APOS*. Disertasi Doktor pada SPs UPI. Bandung: Tidak Diterbitkan
- Asiala, M. et al. (1997). "The development of students' graphical understanding of the derivative". *Journal of Mathematical Behavior*. 16(4), 399-431.
- Asiala, M. dkk. (1998). "The development of students' understanding of permutations and symmetries". *International Journal of Computers for Mathematical Learning*.

- Gutiérrez, P. Boero (eds.). (2006). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 147–172. Sense Publishers. All rights reserved.
- Borich, G. D. (1994). *Observation Skill for Effective Teaching*. Englewood Clif fs: Merril Publisher.
- Brown, dkk. (1997). “Learning binary operations, groups, and subgroups”. *International Journal of Mathematical Behavior*
- Dubinsky, E. et al. (1994). “On Learning Fundamental Concepts of Group Theory”. *Educational Studies in Mathematics*, 27(3), 267-305.
- Dubinsky, E. & McDonald, M. (2001). “APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research”. Dalam D. Holton (ed.). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Dubinsky, E dan Tall, D. (2002). “*Reflective abstraction in advanced mathematical thinking*”. Boston: Kluwer.
- Evans, J.R. (1991). *Creative Thinking in the Decision and Management Sciences*. Cincinnati, Ohio: South-Western Publishing Co.
- Goldin, G. A. (2002). *Representation in Mathematical Learning and Problem solving*. In L.D English (Ed). *International Research in Mathematical Education IRME*, 197-218. New Jersey: Lawrence Erlbaum
- G. Carmona. (1996). “The concept of tangent and its relationship with the concept of derivative”. *International Journal Of Mathematical Education In Science & Technology*.
- Grinnel, Jr., R. M. (1998). *Social work research and evaluation*. Illionis: F.E. Peacock Pub. Inc.
- Hake, R.R. (1999). *Analyzing Change/Gain Scores*. Woodland Hills: Dept. of Physics, Indiana University. [Online]. Tersedia: <http://www.physics.indiana.edu/~sdi/AnalyzingChange-Gain.pdf> [2 Januari 2013]
- Hwang, et al. (2007). *Multiple Representation Skills and Creativity Effect on Mathematical Problem Solving Using a Multimedia Whiteboard System*. *Educational Technology & society*. Vol. 10 No. 2 pp. 191-212
- Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and Learning of Mathematics*, Hillsdale, New Jersey. London: Lawrence Erlbaum
- Kalathil, R.R., & Sherin, M.G. (2000). *Role of Students’ Representation in the Mathematics Classroom*. In B Fishman & S. O’Connor-Divelbiss (Eds). *Fourth international Conference of the learning sciences* (pp. 27-28). Mahwah, NJ: Erlbaum
- Mann, E.L. (2005). *Mathematical Creativity and School Mathematics: Indicators of Mathematical Creativity in Middle School Students*. A Dissertation of Doctor of Philosophy at the University of Connecticut. Tersedia [2 Maret 2010].
- McGregor, D. (2007). *Developing Thinking Developing Learning*. Poland: Open University Press.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standars for School Mathematics*. Reston, V.A: NCTM, Inc.

- Nurlaelah, (2009). *Pencapaian daya dan Kreativitas Matematik Mahasiswa Calon Guru melalui Pembelajaran berdasarkan Teori APOS*. Disertasi Doktor pada SPs UPI. Bandung: Tidak Diterbitkan.
- Polla, G. (2000). *Efforts to Increase Mathematics for All through Communication in Mathematics Learning*. [online]. Tersedia: www.icme-organisers.dk [15 Mei 2012]
- Proclus. (2006). Hystory Geometri. [Online]. Tersedia. http://www-history.mcs.standrews.ac.uk/Extra/Proclus_history_geometry.html
- Rosengrant, D. (2005). An Overview of Recent Research on Multiple Representations. [Online]. Tersedia:<http://paer.rutgers.edu/scientificAbilities/downloads/papers/DavidRosperc2011.pdf>
- Sumarmo. (2011). *Advanced Mathematical Thinking and Habits of Mind Mahasiswa*. Hand Out Perkuliahan.
- Suryadi, D (2012). *Membangun Budaya Baru dalam Berpikir Matematis*. Bandung: Rizqi Press.
- Tall, D. (2002). “*Advanced Mathematical Thinking*”.Boston: Kluwer Tutorial SPSS 17 [*Statistical Software*]. (2008). Chicago:SPSS Inc.
- White, P., & Mitchelmore, M. C. (2010). *Teaching for Abstraction: A Model. Mathematical Thinking & Learning*. Available from: Education Research Complete, Ipswich, MA. Accessed March 4, 2012.
- Yerizon, (2011). *Peningkatan Kemampuan Pembuktian Matematis dengan Pendekatan Modifikasi APOS pada Mahasiswa*. Disertasi Doktor pada SPs UPI. Bandung: Tidak Diterbitkan.
- Yoo, S. (2008). *Effects of Traditional and Problem Based Instruction on Conceptions of Proof and Pedagogy in Undergraduates and Prospective Mathematics Teacher*, Dissertasion of The University of Texas at Austin: Tidak Dipublikasikan